

Tiefenwahrnehmung bei der Stereoprojektion

Gerhard P. Herbig, gph@herbig-3d.de

1 Inhalt

Bei Stereoprojektionen kommt es immer wieder vor, dass einige Objekte in ihren Abmessungen ganz anders wahrgenommen werden, als man sie in Erinnerung hat. Einerseits kann dies ein durchaus erwünschter Effekt sein, beispielsweise dann, wenn ein nur 5cm großer Schmetterling so groß projiziert wird, als hätte er eine Flügelspannweite von 2m. Manchmal ist es aber auch störend - dann nämlich, wenn Menschen so aussehen, als wären sie nur einen Meter groß oder bei der Projektion Kugeln zu Eiern verzerrt werden. Dieser Artikel soll deshalb zwei zentrale Fragen beantworten:

- 1) Wann ist eine Projektion **formtreu**?
- 2) Wann ist eine Projektion **form- und größentreu**?

Wenn die Stereoprojektion ein **formtreues** Raumbild vermittelt, nennt man die Abbildung **orthomorph** (griechisch: "richtig in der Form"), und wenn die Abbildung **form- und größentreu** ist, **tautomorph** (griechisch: "gleich in der Form"). Innerhalb der Stereoskopie hat sich neben der Bezeichnung "orthomorph" auch der Begriff "**orthostereoskopisch**" durchgesetzt. Wir sprechen in diesem Fall dann von einer **orthostereoskopischen Projektion** oder einer **orthostereoskopischen Abbildung**.

Offensichtlich sind die Bedingungen für eine form- und größentreue (also **tautostereoskopische**) Projektion schärfer als die für eine **nur** formtreue (also **orthostereoskopische**).

Die folgenden Kapitel dieses Artikels sind folgendermaßen aufgebaut: In Kapitel 2 wird der Berechnungsgang genauestens erläutert und alle wichtigen geometrischen Größen eingeführt, mit denen dann in Kapitel 3 die **virtuelle Größe**, die **virtuelle Breite** und die **virtuelle Tiefe** eines projizierten Objektes berechnet werden können. Daraus werden dann in Kapitel 4 die Bedingungen für die form-, beziehungsweise form- und größentreue Projektion formuliert. Kapitel 5 diskutiert einige Fälle aus der Praxis, beispielsweise die Folgen einer Veränderung der Stereobasis, der Aufnahmebrennweite oder Einflüsse der Rahmung. Eine Zusammenfassung findet sich schließlich in Kapitel 6 und zum Schluss noch eine Liste aller verwendeten Formelzeichen.

2 Berechnungsablauf

Ziel der Berechnung ist es, herauszufinden, wie groß und wie tief uns ein Objekt bei der Stereoprojektion erscheint. Da dies eine **subjektive** Empfindung ist, wir aber vordringlich an **objektiven** Ergebnissen interessiert sind, benötigen wir einen **Vergleich**. Als Vergleichsgrundlage dient uns hierzu das **natürliche Sehen** und als

Vergleichsgrößen dienen die auf die Netzhaut projizierten Bilder.

2.1 Bildhöhe, Deviation und Abstand

Jedes räumliche Objekt besitzt eine Höhe, eine Breite und eine Tiefe. Da sich die Höhe und die Breite bei allen Abbildungsvorgängen immer in gleicher Weise verändern, braucht nur einer von diesen beiden Werten berechnet werden. Für unsere Zwecke ist das Objekt also durch seine **Größe** und seine **Tiefe** vollständig beschrieben. Für die **Bildhöhe** des Netzhautbildes ist dann allein die Größe des Objektes maßgebend.

Die Information über die Tiefe eines Objektes geht bei einer einzelnen (Mono-) Abbildung verloren - erst im Stereobild ist (durch den Unterschied der beiden Stereohalb Bilder) wieder Tiefeninformation vorhanden. Die Tiefeninformation über einen einzelnen Objektpunkt ist im horizontalen Versatz der zugehörigen korrespondierenden Bildpunkte enthalten. Somit erhält man einen ersten Hinweis über die Tiefenausdehnung eines Objektes durch die Differenz des maximalen und minimalen Bildpunkt-Versatzes. Diese Differenz wird **Deviation** genannt.

Die Deviation allein lässt allerdings noch keinen eindeutigen Rückschluss auf die Tiefenausdehnung eines Objektes zu. Erst im Zusammenhang mit der **Entfernung**, in der das Objekt wahrgenommen wird, ergibt sich für den Betrachter eine ganz bestimmte Wahrnehmung der Objektiefe.

Bei jedem Abbildungsschritt müssen also diese drei Grundgrößen, die **Bildhöhe** h , die **Deviation** d und die **Entfernung** a berechnet werden. Mit Kenntnis dieser drei Größen ist die Wahrnehmung der Objektumrisse (Höhe, Breite und Tiefe) vollständig beschrieben.

2.2 Das natürliche Sehen

Ein erstes Gedankenexperiment: Wir betrachten aus der **Entfernung** a ein **Objekt** O mit der **Größe** g und der **Tiefe** t . Unsere Augen besitzen hierbei die Brennweite f_0 und die Basis b_0 . Die beiden auf der Netzhaut erzeugten Bilder sollen dann die Bildhöhe h_0 und die Deviation d_0 besitzen (die Berechnung dieser Größen erfolgt erst im nächsten Kapitel). Infolge der Konvergenzstellung unserer Augen (und unserer Gedächtnisleistung) nehmen wir das Objekt im Abstand a_0 wahr. Der Index 0 steht hier und im folgenden immer für die Referenzsituation des natürlichen Sehens. Selbstverständlich gehen wir von einem funktionierenden Sehapparat aus, so dass $a_0 = a$ gelten soll. (Wir nehmen das Objekt dort wahr, wo es tatsächlich auch ist.)

2.3 Aufnahme und Projektion

Ein weiteres Gedankenexperiment: Wir nehmen das gleiche Objekt O mit einer Stereokamera auf, projizieren das Bild auf eine Leinwand und betrachten nun die Stereoprojektion. Die Höhe des Netzhautbildes sei jetzt h_v , die Deviation d_v und die Entfernung, in der wir das Objekt wahrnehmen, a_v (der Index v steht für die Betrachtung des **virtuellen** Bildes auf der Leinwand). Schließlich sind g_v die virtuelle Größe und t_v die virtuelle Tiefe, mit der wir das Objekt wahrnehmen.

2.4 Die form- und größentreue Projektion

Offensichtlich nehmen wir das Objekt genau dann mit unverfälschten äußeren Abmessungen wahr, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind (virtuelle Werte sind identisch mit den echten Werten):

$$\begin{aligned} g_v &= g \\ t_v &= t \\ a_v &= a \end{aligned} \quad (2.1)$$

Diese Gleichung (2.1) ist schon eine erste sehr allgemeine Definition für die form- und größentreue Stereoprojektion. Später werden wir daraus noch eine Menge Details ableiten.

Die Bedingung für eine form- und größentreue Abbildung konnten wir noch relativ leicht aufschreiben. Wann jedoch ist eine Abbildung nur formtreu? Bei beliebig gewählten Aufnahme- und Wiedergabeparametern werden wir Gleichungen der Form:

$$\begin{aligned} g_v &= s_g \cdot g \\ t_v &= s_t \cdot t \\ a_v &= s_a \cdot a \end{aligned} \quad (2.2)$$

erhalten. Die hier neu eingeführten Koeffizienten s_g , s_t und s_a seien die **Abbildungskoeffizienten** für die Entfernung, die Größe und die Tiefe. Damit ergibt sich eine **formtreue** Abbildung für

$$s_g = s_t, \quad (2.3)$$

wenn also die Abbildungskoeffizienten für die Größe und die Tiefe identisch sind. Über die Entfernung wird an dieser Stelle noch keine Aussage gemacht.

3 Berechnungsdurchführung

In diesem Kapitel soll nun die eigentliche Durchführung der Berechnung erfolgen. Wieder soll zu Beginn die Referenzsituation des natürlichen Sehens stehen:

3.1 Die Abbildung im Auge beim natürlichen Sehen

Wir betrachten zunächst das **Bild 1**, obere Hälfte. Ein Objekt mit der Größe g wird aus dem Abstand a betrachtet.

Der Abstand der Augenlinse zur Netzhaut sei näherungsweise gleich der Brennweite der Augenlinse, also gleich f_0 . Dann erhalten wir für die uns interessierende Höhe des Netzhautbildes h_0 sofort:

$$h_0 = \frac{f_0}{a} \cdot g. \quad (3.1)$$

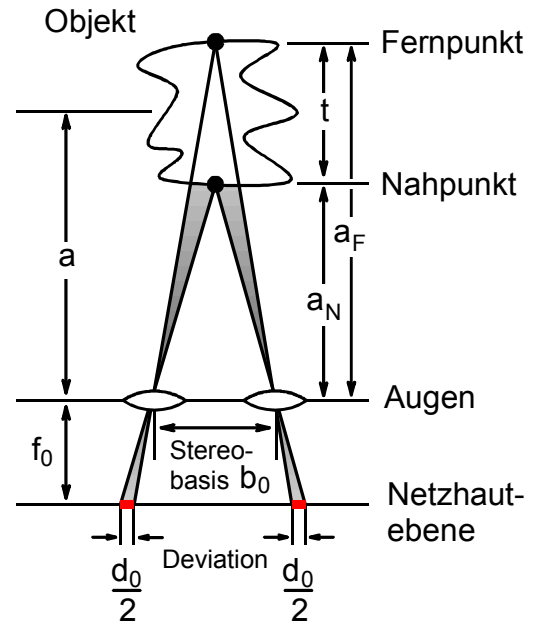
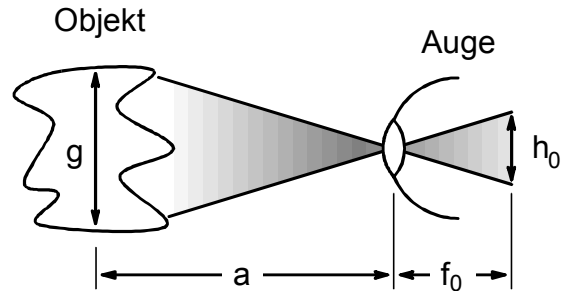


Bild 1: Die Abbildung im Auge beim natürlichen Sehen. Oben: Höhenabbildung, unten: Tiefenabbildung.

Entsprechend erhalten wir aus der unteren Hälfte von Bild 1 ebenfalls mit Hilfe des Strahlensatzes (zweimal den Strahlensatz ansetzen, einmal für den Fernpunkt, einmal für den Nahpunkt, dann die Deviation als Differenz der Bildpunkte des Nahpunktes und der Bildpunkte des Fernpunktes berechnen):

$$d_0 = \frac{b_0 \cdot f_0}{a_N} - \frac{b_0 \cdot f_0}{a_F} = b_0 \cdot f_0 \cdot \frac{a_F - a_N}{a_F \cdot a_N}. \quad (3.2)$$

Hier ist d_0 die zu berechnende Deviation und b_0 der Abstand der beiden Augen. Im Nenner können wir die Differenz aus Fernpunktweite a_F und Nahpunktweite a_N direkt durch die Stereotiefe t ersetzen:

$$t = a_F - a_N, \quad (3.3)$$

und im Zähler verwenden wir für den Objektstand das geometrische Mittel aus Fern- und Nahpunktweite:

$$a = \sqrt{a_F \cdot a_N}. \quad (3.4)$$

Beides oben eingesetzt ergibt schließlich:

$$d_0 = \frac{b_0 \cdot f_0}{a^2} \cdot t. \quad (3.5)$$

Die Gleichungen (3.1) und (3.5) sind im folgenden die Vergleichsgrundlagen für die Objektwahrnehmung bei der **Stereoprojektion**, die man in eine **Kameraabbildung**, eine **Projektion** auf die Leinwand und eine **Betrachtung des Projektionsbildes** unterteilen kann. Diese drei Teilabbildungen sind als Kettenabbildung in **Bild 2** und **Bild 3** skizziert, und zwar in Bild 2 die Höhenabbildung und in Bild 3 die Tiefenabbildung.

3.2 Die Abbildung in der Kamera

Die Bilder 2 und 3 - jeweils oberes Drittel - zeigen die Abbildung in der Kamera. Formal erhalten wir genau die gleichen Formeln wie beim natürlichen Sehen (Gleichung (3.1) und (3.5)), jetzt aber mit der Aufnahmebrennweite f_K , der Bildhöhe h_K , und der Stereobasis b_K . Die Deviation, die wir bei der Aufnahme erhalten, ist d_K :

$$h_K = \frac{f_K}{a} \cdot g, \quad (3.6)$$

$$d_K = \frac{b_K \cdot f_K}{a^2} \cdot t. \quad (3.7)$$

3.3 Die Abbildung auf der Leinwand

Das Dia wird bei der Projektion linear auf die Leinwand vergrößert. Der Projektor habe hierbei die Brennweite f_P und stehe im Abstand a_P von der Leinwand entfernt. Die Bildhöhe und die Deviation werden mit dem gleichen Vergrößerungsfaktor $V = a_P / f_P$ auf die Leinwand projiziert, siehe dazu Bild 2 und Bild 3 - jeweils mittleres Bilddrittel. Die Bildhöhe auf der Leinwand h_P und die Deviation auf der Leinwand d_P sind deshalb:

$$h_P = \frac{a_P}{f_P} \cdot h_K = \frac{f_K \cdot a_P}{f_P \cdot a} \cdot g, \quad (3.8)$$

$$d_P = \frac{a_P}{f_P} \cdot d_K = \frac{b_K \cdot f_K \cdot a_P}{f_P \cdot a^2} \cdot t. \quad (3.9)$$

3.4 Die Abbildung im Auge bei der Stereoprojektion

Der letzte Schritt ist nun die Abbildung des Leinwandbildes auf die Netzhaut des Betrachters. Auch dies ist eine lineare Abbildung mit identischem

Vergrößerungsfaktor für Bildhöhe und Deviation. Der Betrachter stehe im Abstand a_B vor der Leinwand und seine Augenlinsen haben wieder die Brennweite f_0 . Die virtuelle Bildhöhe und die virtuelle Deviation des Netzhautbildes seien jetzt h_v und d_v . Diese Abbildungen sind ebenfalls in Bild 2 und Bild 3 - jeweils unteres Bilddrittel - aufgezeichnet:

$$h_v = \frac{f_0}{a_B} \cdot h_P = \frac{f_0 \cdot f_K \cdot a_P}{f_P \cdot a_B \cdot a} \cdot g, \quad (3.10)$$

$$d_v = \frac{f_0}{a_B} \cdot d_P = \frac{b_K \cdot f_0 \cdot f_K \cdot a_P}{f_P \cdot a_B \cdot a^2} \cdot t. \quad (3.11)$$

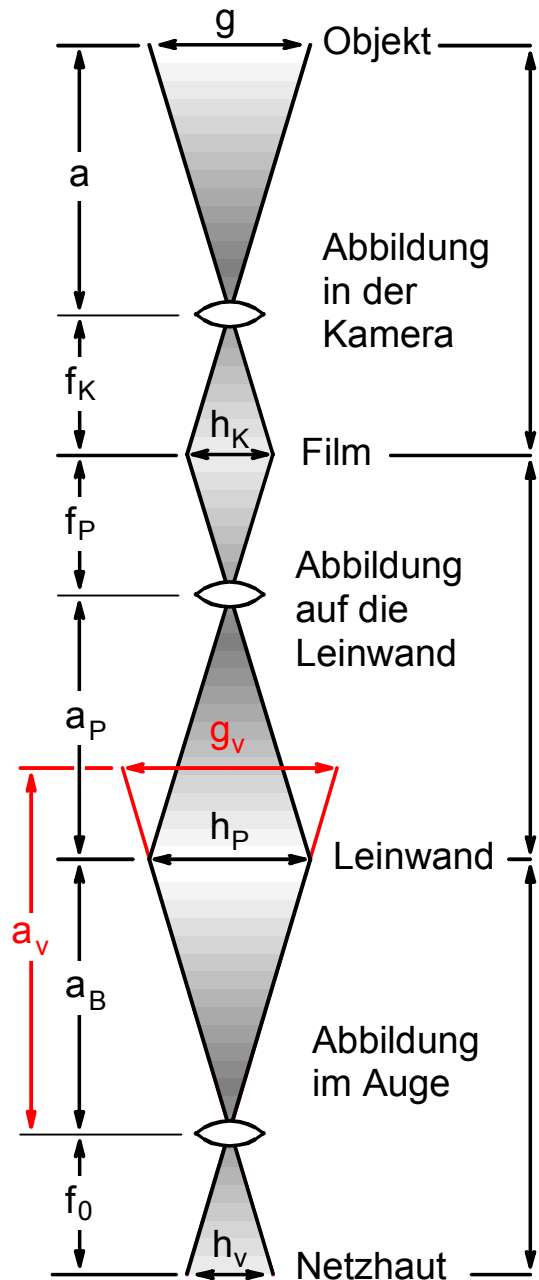


Bild 2: Höhenabbildung als Kettenabbildung der Kameraabbildung, der Abbildung auf die Leinwand und der Abbildung im Auge.

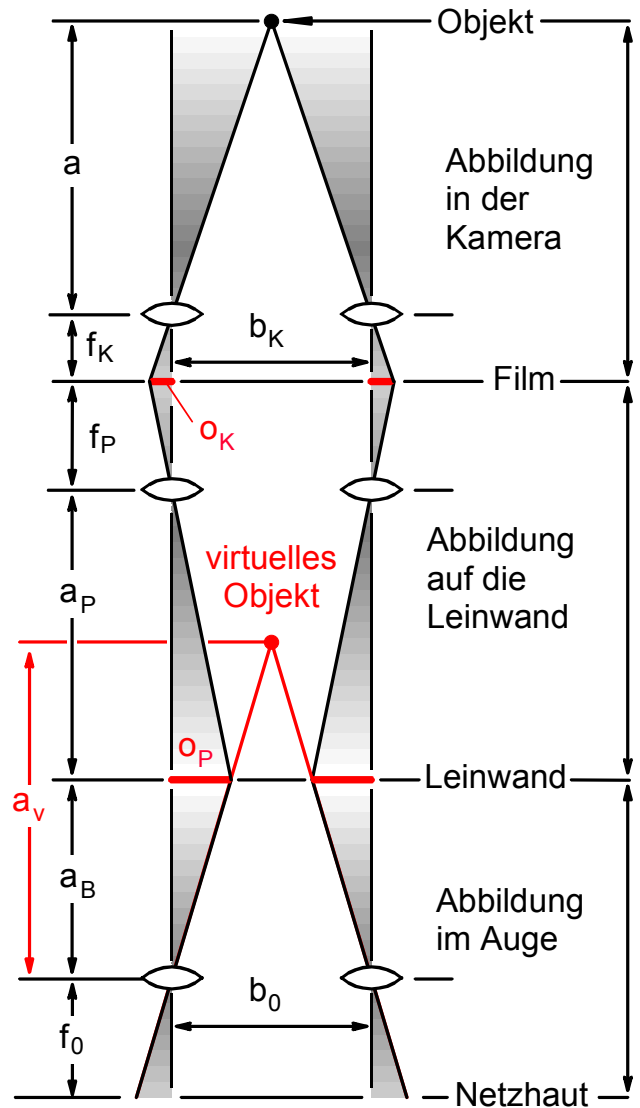
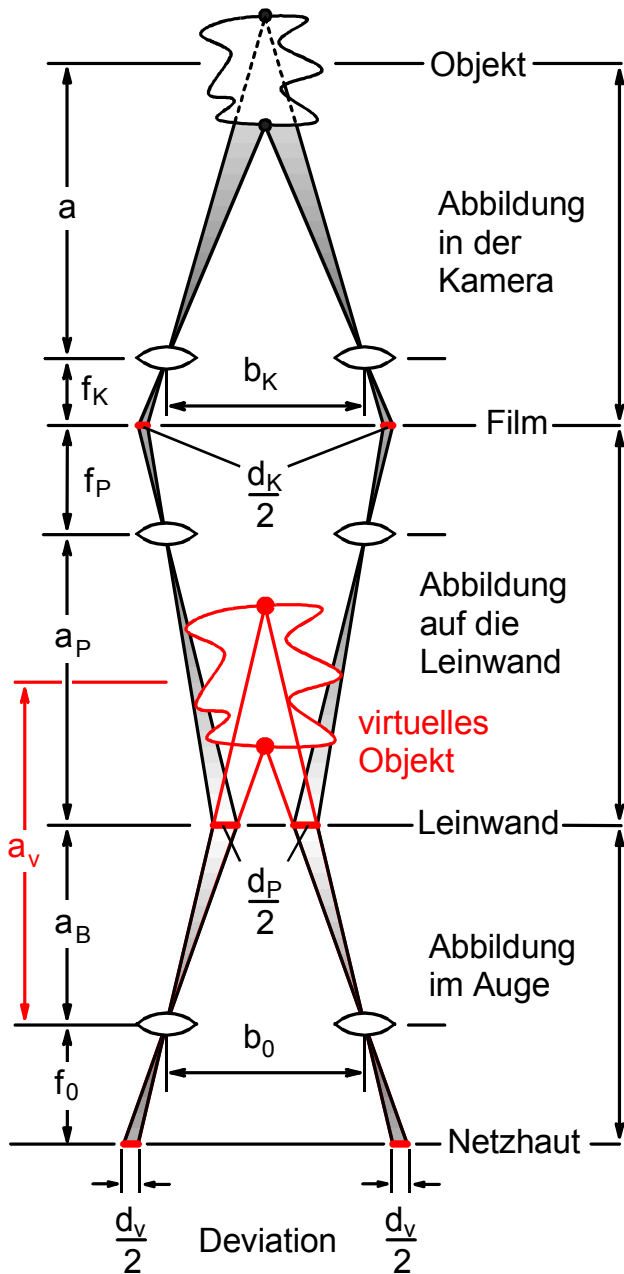


Bild 4: Zur Berechnung des virtuellen Abstandes eines punktförmigen Objektes bei der Stereoprojektion.

Bild 3: Tiefenabbildung als Kettenabbildung der Kameraabbildung, der Abbildung auf die Leinwand und der Abbildung im Auge.

3.5 Der virtuelle Abstand

Eine besondere Rolle spielt der Abstand, in dem wir ein Objekt bei der Stereoprojektion wahrnehmen. Dieser Abstand ist der **virtuelle Abstand** a_v . Er ist ebenfalls in Bild 3 (rot) eingezeichnet. Wir sehen, dass wir dort das Objekt hinter der Leinwand wahrnehmen. Um den virtuellen Abstand genauer herzuleiten, werden noch weitere Größen benötigt, die in **Bild 4** eingezeichnet sind.

Der Bildpunkt eines punktförmigen Objektes besitzt in der Filmebene gegenüber dem Unendlichpunkt einen seitlichen Versatz. Dieser Versatz wird **parallaktische Verschiebung** o_K (K für Kamera) genannt:

$$o_K = \frac{b_K \cdot f_K}{2 \cdot a} \quad (3.12)$$

Die parallaktische Verschiebung wird mit dem Vergrößerungsfaktor $V = a_P / f_P$ auf die Leinwand abgebildet. Dort ist also der Versatz o_P :

$$o_P = \frac{a_P}{f_P} o_K = \frac{b_K \cdot f_K \cdot a_P}{2 \cdot f_P \cdot a} \quad (3.13)$$

Mit gegebenem o_P ist schließlich auch der virtuelle Abstand berechenbar:

$$a_v = \frac{b_0 \cdot a_B}{2 \cdot o_P} = \frac{b_0 \cdot f_P \cdot a_B}{b_K \cdot f_K \cdot a_P} \cdot a \quad (3.14)$$

3.6. Virtuelle Größe und virtuelle Tiefe

Bisher haben wir aus rein geometrischen Überlegungen lediglich Aussagen über das Netzhautbild erhalten (h_v und d_v). Der **entscheidende Schritt**, nämlich der Schluss auf die virtuellen Wahrnehmungsgrößen g_v und t_v erfolgt erst jetzt: Ausgehend von (3.1) und (3.5) definieren wir die **virtuelle Objektgröße** g_v über die virtuelle Bildhöhe:

$$h_v = \frac{f_0}{a_v} \cdot g_v, \quad (3.15)$$

und die **virtuelle Objekttiefe** t_v über die virtuelle Deviation:

$$d_v = \frac{b_0 \cdot f_0}{a_v^2} \cdot t_v. \quad (3.16)$$

In beiden Fällen muss natürlich der virtuelle Abstand a_v berücksichtigt werden.

Durch Vergleich von (3.10) mit (3.15) und (3.11) mit (3.16) erhält man schließlich für die virtuellen Objektwerte (und jeweils nach Elimination von a_v mit Gleichung (3.14)):

$$g_v = \frac{f_K \cdot a_v \cdot a_P}{f_P \cdot a_B \cdot a} \cdot g = \frac{b_0}{b_K} \cdot g, \quad (3.17)$$

$$t_v = \frac{b_K \cdot f_K \cdot a_v^2 \cdot a_P}{b_0 \cdot f_P \cdot a_B \cdot a^2} \cdot t = \frac{b_0 \cdot f_P \cdot a_B}{b_K \cdot f_K \cdot a_P} \cdot t. \quad (3.18)$$

An dieser Stelle führen wir noch eine Abkürzung ein und nennen diese den **Tiefenfaktor** T :

$$T = \frac{f_P \cdot a_B}{f_K \cdot a_P} = \frac{a_B}{V \cdot f_K}. \quad (3.19)$$

Mit dieser Abkürzung formulieren wir nochmals die Gleichungen (3.14), (3.17) und (3.18):

$$\begin{aligned} g_v &= \frac{b_0}{b_K} \cdot g \\ t_v &= \frac{b_0}{b_K} \cdot T \cdot t \\ a_v &= \frac{b_0}{b_K} \cdot T \cdot a \end{aligned} \quad (3.20)$$

und vergleichen dieses Ergebnis mit (2.2). Damit haben wir eine sehr kompakte Formulierung für die Abbildungskoeffizienten gefunden:

$$s_g = \frac{b_0}{b_K} \quad (3.21)$$

$$s_t = s_a = \frac{b_0}{b_K} \cdot T. \quad (3.22)$$

4 Ortho- und Tautostereoskopie

Mit den Vorleistungen aus Kapitel 3 können wir nun sehr einfach die eingangs gestellten Fragen, wann eine **form- und größentreue**, und wann eine **nur formtreue** Abbildung vorliegt, beantworten.

4.1 Die tautostereoskopische (form- und größentreue) Abbildung

Eine form- und größentreue Abbildung ist genau dann gegeben, wenn $s_g = s_t = s_a = 1$ gilt, oder

$$b_0 = b_K \quad (4.1)$$

und gleichzeitig

$$T = \frac{f_P \cdot a_B}{f_K \cdot a_P} = V \cdot \frac{a_B}{f_K} = 1 \quad (4.2)$$

erfüllt sind. Zur tautostereoskopischen Abbildung sind also genau zwei Voraussetzungen notwendig: Erstens muss die Aufnahmebasis b_K genauso groß sein wie der Augenabstand b_0 (Gleichung (4.1)) und zweitens müssen die Brennweiten der Aufnahmekamera und des Stereoprojektors sowie die Entfernungen des Projektors und des Betrachters zur Leinwand in einem bestimmten Verhältnis stehen (Gleichung (4.2)). Da die einzige Möglichkeit, bei einer Projektion den Tiefenfaktor T nachträglich zu beeinflussen darin besteht, den Betrachtungsabstand a_B zur Leinwand zu verändern (an den drei anderen Parametern lässt sich während der Projektion in der Regel nichts mehr ändern), kann man im Projektionsaal einen besonderen Punkt

$$a_B|_{\text{ortho}} = \frac{f_K \cdot a_P}{f_P} = V \cdot f_K \quad (4.3)$$

definieren, von dem aus für den Betrachter eine form- und größentreue Darbietung möglich ist, solange Gleichung (4.1) ebenso erfüllt ist. Weil von diesem Betrachtungspunkt das Raumbild immer formtreu (orthostereoskopisch) wirkt, wird dieser Punkt auch **orthostereoskopischer Punkt** genannt.

4.2 Die orthostereoskopische (nur formtreue) Abbildung

Die Bedingung für eine formtreue Abbildung wurde schon in Gleichung (2.3) formuliert. Mit (3.20) erhält man daraus:

$$T = \frac{f_P \cdot a_B}{f_K \cdot a_P} = 1, \quad (4.4)$$

also das gleiche Ergebnis wie zuvor, jetzt aber **ohne die Bedingung für die Stereobasis**. Bei einer Betrachtung vom orthostereoskopischen Punkt ist die Formtreue also immer erfüllt. Besonders interessant erscheint die Tatsache, dass die Formtreue allein durch die Einhaltung von (4.4) erreicht werden kann – **bei beliebiger Stereobasis**. Variiert man umgekehrt nur die Stereobasis, hat dies ausschließlich eine Wirkung auf den Größeneindruck – eine Formveränderung findet durch Veränderung der Stereobasis also nicht statt! Dieses Ergebnis mag im ersten Moment überraschen - und möglicherweise auch im Widerspruch zu eigenen Erfahrungen stehen, stellt man doch gerade bei Makro- oder Großbasisaufnahmen am häufigsten Tiefenverzerrungen fest. Das liegt aber nicht an der veränderten Stereobasis, sondern in der Regel an der **Rahmung** der Stereodias. Bevor wir nun im nächsten Kapitel noch genauer auf die Rahmung eingehen werden, wollen wir den Tiefenfaktor T noch etwas genauer betrachten.

Angenommen, der Tiefenfaktor T sei größer als 1, beispielsweise infolge eines größeren Betrachtungsabstandes a_B , als es Gleichung (4.3) vorschreibt (der Betrachter befindet sich also im Projektionsaal **hinter** dem orthostereoskopische Punkt), dann nimmt nach (3.17) auch die virtuelle Tiefe t_v linear mit T zu, nicht aber die virtuelle Größe g_v . Dies bedeutet, dass uns die Objekte tiefer erscheinen, wenn wir uns weiter hinten im Saal befinden, und flacher, wenn wir weiter vorne sitzen. Dieser Effekt lässt sich auch folgendermaßen erklären:

Wenn wir uns beim natürlichen Sehen von einem Objekt entfernen, nimmt die Bildgröße h_0 auf der Netzhaut nur **linear** mit der Entfernung ab, die Deviation d_0 aber **quadratisch** (Gleichungen (3.1) und (3.5)). Diese Abhängigkeiten sind fest in unserem Gehirn programmiert und bei jeder Abweichung davon meldet unser Gehirn eine Formverzerrung. Entfernen wir uns nun bei der Stereoprojektion von der Leinwand, nehmen sowohl die virtuelle Bildgröße h_v als auch die virtuelle Deviation d_v **nur linear** ab (Gleichungen (3.10) und (3.11), im Nenner jeweils a_B). Der Wert für die Deviation ist also in diesem Beispiel zu groß (verglichen mit der Entfernung von einem natürlichen Objekt) und damit erscheint uns das Objekt zu tief.

Noch eine andere Interpretation lässt Gleichung (3.20) zu: Offensichtlich ist **genau dann** eine formtreue Bildwahrnehmung garantiert (also $T = 1$), wenn wir das Bild im virtuellen Abstand

$$a_v = \frac{b_0}{b_K} \cdot a \quad (4.5)$$

wahrnehmen. Schon jetzt sehen wir, dass diese Forderung in der Praxis kaum einzuhalten ist. Angenommen, wir porträtieren mit einer normalen Stereokamera eine Person aus 2 m Entfernung, dann ist eine formtreue Wahrnehmung nur möglich, wenn wir bei der Projektion das virtuelle Bild dieser Person ebenfalls in einer Entfernung von 2m orten. Diese Forderung kann allenfalls noch im eigenen

Wohnzimmer erfüllt werden, mit Sicherheit aber nicht mehr bei einer Saalprojektion (Ausnahme: IMAX 3D). Ähnliche Schwierigkeiten treten bei Makroaufnahmen auf, die nicht selten aus sehr geringen Entfernungen angefertigt werden. Auch die deutliche Reduktion der Stereobasis gegenüber dem Augenabstand vermag die geforderte virtuelle Entfernung nicht mehr auf ein realistisches Maß vergrößern zu können (Beispiel: Aufnahmeabstand = 30cm und Stereobasis = 1cm ergibt bei angenommenen 6,5cm Augenabstand nach Gleichung (4.5) einen geforderten virtuellen Abstand von ebenfalls etwa 2m).

Der virtuelle Größeneindruck ist übrigens genau umgekehrt proportional zur Stereobasis. Nach (3.20) erscheint uns bei halbiertes Stereobasis ein projiziertes Objekt genau doppelt so groß wie in Wirklichkeit - und bei verdoppelter Stereobasis nur noch halb so groß. Diesen Effekt wird jeder leicht nachvollziehen können, der schon einmal Makro- oder Großbasis-Stereodias projiziert hat.

5 Einflüsse der Diarahmung

Bei allen bisherigen Gleichungen spielte die Rahmung der Stereodias überhaupt noch keine Rolle. Selbstverständlich müssen wir aber zur Projektion in Kapitel 3.4 und 3.5 die Stereodias in irgendeiner Form gerahmt haben. Tatsächlich haben wir dort auch unterstellt, dass die beiden korrespondierenden Unendlich-Punkte **im Augenabstand** auf die Leinwand projiziert werden (siehe auch Bild 3 und Bild 4). Diese sogenannte **natürlich Projektion**¹ erlaubt nicht nur eine form- beziehungsweise form- und größentreue Projektion, sie garantiert auch divergenzfreie Augenachsen für jeden Betrachter, unabhängig vom Bildinhalt oder von der Betrachtungsentfernung von der Leinwand.

Wir werden nun Gleichung (3.20) nochmals neu formulieren, jetzt aber mit beliebiger Lage der Stereodias in den Diarahmchen. Wir nehmen im folgenden an, dass der Abstand der beiden Dias gegenüber der Position der natürlichen Projektion **um den Wert r verringert** worden sei. Hierbei ist es gleichgültig, ob das linke oder das rechte Dia aus seiner ursprünglichen Position verschoben wurde. Bei dieser Manipulation ändert sich der virtuelle Abstand a_v nach Gleichung (3.14). Wir müssen diesen also neu formulieren, wobei wir im ersten Schritt anstatt o_K jetzt

$$o_K' = o_K + r \quad (5.1)$$

schreiben, da sich die parallaktische Verschiebung des zu betrachtenden Raumpunktes genau um diesen Wert r ändert. Entsprechend gilt für die parallaktische Verschiebung auf der Leinwand:

¹ Der Abstand der Unendlich-Punkte auf der Leinwand ist neben der Rahmung auch von der Ausrichtung der Projektoren abhängig. Für die Auswirkungen auf die Raumwahrnehmung ist allerdings nur das Gesamtergebnis, also die Lage der Bilder auf der Leinwand relevant. Ich habe deshalb für die oben beschriebene Situation die Bezeichnung **natürliche Projektion** gewählt.

$$o_p' = V \cdot o_K' = V \cdot o_K + V \cdot r. \quad (5.2)$$

Als Ersatz von (3.14) gilt also für den virtuellen Abstand:

$$a_v = \frac{b_0 \cdot a_B}{2 \cdot o_p'} = \frac{b_0 \cdot f_P \cdot a_B}{b_K \cdot f_K \cdot a_P} \cdot \frac{b_K \cdot f_K}{b_K \cdot f_K + 2 \cdot r \cdot a} \cdot a.$$

Wir schreiben in Erweiterung zu (3.20):

$$a_v = \frac{b_0}{b_K} \cdot T \cdot R(a) \cdot a \quad (5.4)$$

und haben hierbei den Rahmungsfaktor $R(a)$ eingeführt:

$$R(a) = \frac{b_K \cdot f_K}{b_K \cdot f_K + 2 \cdot r \cdot a} \quad (5.5)$$

Dieser Rahmungsfaktor ist neben der Kamerabasis b_K und der Kamerabrennweite f_K leider auch noch von der Objektentfernung a abhängig, d.h., für jedes abgebildete Objekt ergibt sich bei konstanter Verschiebung r ein anderer Rahmungsfaktor.

Im nächsten Schritt wiederholen wir die Berechnung aus Kapitel 3.6 und lösen (3.15) und (3.16) nach g_v und t_v auf, verwenden aber jetzt nicht den virtuellen Abstand nach (3.14), sondern nach (5.4).

Damit erhalten wir anstelle von (3.20):

$$\begin{aligned} g_v &= \frac{b_0}{b_K} \cdot R(a) \cdot g \\ t_v &= \frac{b_0}{b_K} \cdot T \cdot R^2(a) \cdot t \\ a_v &= \frac{b_0}{b_K} \cdot T \cdot R(a) \cdot a \end{aligned} \quad (5.6)$$

Diese Gleichung (5.6) muss Gleichung (3.20) natürlich für den Sonderfall $R(a) = 1$ enthalten. Der Rahmungsfaktor R geht in die drei virtuellen Werte **Größe**, **Tiefe** und **Entfernung** leider *unterschiedlich* ein. Die virtuelle Größe und die virtuelle Entfernung steigen **linear** mit R , die virtuelle Tiefe aber **quadratisch**. Bei positivem r , also Verringerung des Diaabstandes, ist $R < 1$. Die Tiefenausdehnung nimmt damit stärker ab als die Größe und das virtuelle Objekt erscheint uns näher und kleiner, aber eben auch flacher.

Zusätzlich ist zu berücksichtigen, dass $R(a)$ nicht konstant ist, sondern eben noch von der Objektentfernung a abhängt, siehe Gleichung (5.5).

Eine formtreue Änderung hätte sich nur ergeben, wenn $R(a)$ in allen drei Größen einen **gleichen und von a unabhängigen Einfluss** gehabt hätte. So aber ist jede

Abweichung von der natürlichen Projektion mit einer Tiefenverzerrung verbunden.

Allerdings ist es möglich, für räumlich begrenzte Objekte eine **punktueller Formtreue** zu definieren, bei der ein Objekt **nur in der Mitte** tatsächlich **formtreu** erscheint. Wir erreichen genau diese Situation, wenn wir für die **Objektmitte** a_M (entweder durch Wahl eines geeigneten Betrachtungsstandortes oder durch eine entsprechende Diarahmung) die Bedingung

$$T \cdot R(a_M) = 1 \quad (5.7)$$

erfüllen. Dann lässt sich in Gleichung (5.6) der Tiefenfaktor $T = 1/R(a_M)$ eliminieren:

$$\begin{aligned} g_v(a) &= \frac{b_0}{b_K} \cdot R(a) \cdot g \\ t_v(a) &= \frac{b_0}{b_K} \cdot \frac{R^2(a)}{R(a_M)} \cdot t \\ a_v(a) &= \frac{b_0}{b_K} \cdot \frac{R(a)}{R(a_M)} \cdot a \end{aligned} \quad (5.8)$$

Die zusätzlichen Abhängigkeiten von a bewirken, dass die vorderen Objektelemente zu flach und die hinteren Objektelemente zu tief erscheinen. Im Bereich der Objektmitte gilt näherungsweise $a \approx a_M$ und deshalb:

$$\begin{aligned} g_v &= \frac{b_0}{b_K} \cdot R(a_M) \cdot g \\ t_v &= \frac{b_0}{b_K} \cdot R(a_M) \cdot t \\ a_v &= \frac{b_0}{b_K} \cdot a \end{aligned} \quad (5.9)$$

Wir sehen das Objekt also in der Größe mit dem Faktor $R(a_M)$ skaliert, aber da die virtuelle Größe und Tiefe in **gleicher Weise** beeinflusst werden, näherungsweise formtreu.

Da ein Betrachtungsabstand a_B , der die Bedingung (5.7) erfüllt, offensichtlich auch im Falle einer **nicht-natürlichen Projektion** eine halbwegs formtreue Betrachtung ermöglicht, wollen wir diesen Abstand den **quasi-orthostereoskopischen Punkt** nennen:

$$a_B|_{\text{quasi-ortho}} = \frac{f_K \cdot a_P}{f_P \cdot R(a_M)} = V \cdot \frac{f_K}{R(a_M)} \quad (5.10)$$

Von diesem Punkt aus nehmen wir das Objekt im (b_0/b_K) -fachen Abstand wahr und es erscheint uns in der Größe um den Faktor $R(a_M) \cdot (b_0/b_K)$ skaliert. Leider ist dieser quasi-orthostereoskopische Punkt von der Objektentfernung abhängig und kann deshalb auch nur für ein einzelnes isoliertes Objekt angegeben werden. Um

Gleichung (5.7) zu erfüllen ist die Verschiebung r entsprechend

$$r = \frac{b_0}{2 \cdot V} - \frac{f_K \cdot b_K}{2 \cdot a} \quad (5.11)$$

zu wählen (Gleichung (5.7) mit (5.10) und (3.19)).

Übrigens ist es für die hier getroffenen Aussagen völlig unerheblich, ob das Dia im Rahmen um die Strecke r , oder das Projektionsbild auf der Leinwand um Vr verschoben wird. Dies hat lediglich einen Einfluss auf das Scheinfenster, nicht jedoch auf die hier interessierende Tiefenverzerrung der abgebildeten Objekte.

5.1 Stereo-Makrofotografie

In der Stereo-Makrofotografie wird häufig ein räumlich allseitig begrenztes Objekt aufgenommen und das Stereobild anschließend so gerahmt, dass es in der Leinwandebene zu sehen ist. Welche Aufnahmebasis ist zu wählen, um dieses Objekt dann im quasi-orthostereoskopischen Sinne auch formtreu wahrnehmen zu können? Die Antwort auf diese Frage gibt Gleichung (5.9/3) mit $a_v = a_B$:

$$b_K = b_0 \cdot \frac{a}{a_B} \quad (5.12)$$

In der Praxis wird die Stereobasis jedoch häufig etwas größer gewählt, um dem Raumbild – auf Kosten der Formtreue – eine größere Tiefenausdehnung zu geben.

Beispiel: Angenommen wir fotografieren eine Blüte mit den Aufnahmeparametern Abstand $a = 300$ mm, Brennweite $f_K = 100$ mm und Stereobasis $b_K = 15$ mm.

Bei einer Projektion sei die Projektionsvergrößerung $V = 60$ (ergibt ein etwa 2m breites Bild bei 35mm Film) und der Abstand des Betrachters mit der Augenbasis $b_0 = 60$ mm von der Leinwand sei $a_B = 4$ m.

Die Gleichungen (3.19) und (3.20) ergeben bei natürlicher Projektion einen Tiefenfaktor:

$$T = \frac{a_B}{V \cdot f_K} = \frac{4000\text{mm}}{60 \cdot 100\text{mm}} = 0,66,$$

und damit:

$$g_v = 4 \cdot g$$

$$t_v = 2,66 \cdot t$$

$$a_v = 2,66 \cdot a = 80\text{cm}$$

Das Objekt erscheint dem Betrachter also in einem virtuellen Abstand von 80cm und dabei gestaucht in der Tiefe um den Faktor 0,66 (der orthostereoskopische Abstand nach Gleichung (4.3) liegt in einer Entfernung von 6m von der Leinwand).

Nun wird der Abstand der Dias im Diarahmen etwas vergrößert, um den virtuellen Objektabstand zu erhöhen (und die Blüte in die Leinwandebene zu ziehen). Verfolgen wir einmal, was passiert, wenn der Abstand der Dias im Diarahmen um $r = -2$ mm vergrößert wird. Wir berechnen dazu den Rahmungsfaktor R nach Gleichung (5.5):

$$\begin{aligned} R &= \frac{b_K \cdot f_K}{b_K \cdot f_K + 2 \cdot r \cdot a} \\ &= \frac{15\text{mm} \cdot 100\text{mm}}{15\text{mm} \cdot 100\text{mm} - 2 \cdot 2\text{mm} \cdot 300\text{mm}} = 5 \end{aligned}$$

und erhalten die virtuellen Größen wieder nach Gleichung (5.6):

$$g_v = 4 \cdot 5 \cdot g = 20 \cdot g$$

$$t_v = 4 \cdot 0,66 \cdot 25 \cdot t = 66,66 \cdot t$$

$$a_v = 4 \cdot 0,66 \cdot 5 \cdot a = 13,33 \cdot a = 4\text{m}$$

Wir haben also durch die Rahmung erreicht, dass das Objekt nun in der Leinwandebene gesehen wird ($a_v = 4$ m), jedoch um den Preis einer entsetzlich übertriebenen Tiefe (um den Faktor $s_t/s_g = 66,66/20 = 3,33$). Wählen wir jedoch die Aufnahmebasis nach (5.12):

$$b_K = b_0 \cdot \frac{a}{a_B} = 60\text{mm} \cdot \frac{300\text{mm}}{4000\text{mm}} = 4,5\text{mm},$$

sehen wir das Objekt in der Leinwandebene quasi-orthostereoskopisch ($s_g = s_t = 20$).

6 Zusammenfassung

Eine **formtreue (orthostereoskopische) Abbildung** erhält man nur, wenn zwei Voraussetzungen erfüllt sind:

1) Es liegt eine **natürliche Projektion** vor, das heißt, die korrespondierenden Unendlich-Punkte werden **im Augenabstand** auf die Leinwand projiziert.

2) Die Betrachtung des Projektionsbildes erfolgt vom orthostereoskopischen Punkt nach Gleichung (4.3).

Wird zusätzlich verlangt, dass die Abbildung auch **größentreu (also tautostereoskopisch)** sein soll, muss die Aufnahmebasis der Kamera dem Augenabstand entsprechen, siehe Gleichung (4.1).

Die Betrachtung ist immer dann formtreu, wenn das virtuelle Objekt im Aufnahmeabstand, skaliert mit dem Verhältnis des Augenabstandes zur Aufnahmebasis, wahrgenommen wird, siehe Gleichung (4.5).

Falls keine natürliche Projektion vorliegt, ist eine formtreue Abbildung nicht mehr möglich. Vom **quasi-orthostereoskopischen** Betrachtungspunkt nach Gleichung (5.10) wird streng genommen nur noch die Objektmittle formtreu wahrgenommen, die vorderen Objektelemente erscheinen zu flach und die hinteren Objektelemente zu tief.

Liste der verwendeten Symbole:

a	Entfernung zum Objekt, sowohl beim natürlichen Sehen als auch bei der Aufnahme	s_t	Skalierungsfaktor Objekttiefe
a_B	Abstand des Betrachters von der Leinwand	t	Objekttiefe
a_N	Nahpunktweite, die Entfernung vom Betrachter zum nächstliegenden Objektpunkt	t_v	virtuelle Objekttiefe bei der Stereoprojektion
a_F	Fernpunktweite, die Entfernung vom Betrachter zum entferntesten Objektpunkt	T	Tiefenfaktor
a_M	Entfernung zur Objektmittle	V	Vergrößerungsfaktor bei der Projektion
a_P	Abstand des Projektors von der Leinwand		
a_v	virtuelle Entfernung, in der man das Objekt bei der Stereoprojektion wahrnimmt		
b_0	Augenabstand des Betrachters		
b_K	Stereobasis der Aufnahmekamera		
d	Deviation, Differenz zwischen dem maximalen und dem minimalen Bildpunktversatz eines Objektpunktes in einem Stereobild		
d_K	Deviation im Diapositiv		
d_P	Deviation auf der Leinwand		
d_v	Deviation des virtuellen Bildes auf der Netzhaut		
f_0	Brennweite der Augenlinsen		
f_K	Brennweite der Kamera		
f_P	Brennweite des Projektors		
g	Objektgröße		
g_v	virtuelle Objektgröße bei der Stereoprojektion		
h	Objekthöhe		
h_0	Höhe des Objektbildes beim natürlichen Sehen auf der Netzhaut		
h_K	Höhe des Objektbildes auf dem Diapositiv		
h_P	Höhe des Objektbildes auf der Leinwand		
h_v	Höhe des Objektbildes auf der Netzhaut bei der Stereoprojektion		
o_K	parallaktische Verschiebung des Bildpunktes auf dem Diapositiv relativ zum Unendlichpunkt		
o_P	parallaktische Verschiebung des Bildpunktes auf der Leinwand relativ zum Unendlichpunkt		
r	Seitlicher Rahmungsversatz des Diapositives		
R	Rahmungsfaktor		
s_a	Skalierungsfaktor Objektentfernung		
s_g	Skalierungsfaktor Objektgröße		